Journal of Techniques, ISSN: 2708-8383, Vol. 5, No. 2, 2023, Pages 197-205
DOI: https://doi.org/10.51173/jt.v5i2.598

JOURNAL OF TECHNIQUES

Journal homepage: http://journal.mtu.edu.iq

RESEARCH ARTICLE - MANAGEMENT

Comparison of Some Spatial Regression Models Using Simulation

Amna Hussein Shawq[1*], Ismail Hadi Globe[1], Muktar Hussaini[2]

[1] Technical College of Management - Baghdad, Middle Technical University, Baghdad, Iraq

[2] Hussaini Adamu Federal Polytechnic, Nigeria

[*] Corresponding author E-mail: dac0001@mtu.edu.iq

Article Info.

Article history:

Received
03 September 2022

Accepted
02 November 2022

Publishing
30 June 2023

Abstract

Breast cancer is one of the most common diseases affecting women in the world as a whole ،and the incidence rates differ from one region to another, and this phenomenon can be studied depending on the influence of place and not time ،where spatial data is directly affected by a set of influencing factors (age ،geographic location ،social ،economic and reproductive status Intake of hormones ،lifestyle risk factors (smoking ،diet ،obesity ،physical activity) and family history that contribute to the disease. In this research ،spatial regressive models were used to analyze spatial data for breast cancer and by comparing the estimation between spatial regressive models by Monte Carlo simulation to choose the best estimator between the spatial regressive models. The first model is spatial autoregressive mode and the second A model is the spatial error model and the application of the two estimation methods ،the ordinary least squares method ،and the maximum likelihood method on the regression models. The method of maximum likelihood method of the spatial auto-regression model is the best according to the difference in the sample size used and the number of explanatory variables.

This is an open-access article under the CC BY 4.0 license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Publisher: Middle Technical University

Keywords: Spatial Regression Models; Spatial Weights Matrix; Least Squares Method; Greatest Possible Method; Mean Squares Error.

مقارنة لبعض نماذج الانحدار المكاني باستخدام المحاكاة

آمنة حسين شوق علي[1] *، أسماعيل هادي جلوب[1]، مختار حسيني[2]

[1] الجامعة التقنية الوسطى – كلية التقنيات الادارية – بغداد – العراق

[2] جامعة الحسيني أدامو الفيدرالية للعلوم، نيجيريا

* البريد الإلكتروني: dac0001@mtu.edu.iq

معلومات المقالة

تاريخ الاستلام
03 ايلول 2022

تاريخ القبول
02 تشرين الثاني 2022

تاريخ النشر
30 حزيران 2023

الخلاصة

يعّد مرض سرطان الثدي من أكثر الامراض السرطانية شيوعا التي تصيب النساء على مستوى العالم ككل وتختلف معدلات الاصابة بين منطقة واخرى، يمكن دراسة هذه الظاهرة اعتمادا على تأثير المكان بدل السنوات وتتأثر البيانات المكانية بصورة مباشرة بمجموعة من العوامل المؤثرة (العمر، الموقع الجغرافي، الحالة الاجتماعية والاقتصادية والإنجابية، تناول الهرمونات، عوامل الخطر المتعلقة بنمط الحياة (التدخين، النظام الغذائي، السمنة والنشاط البدني)، والتاريخ العائلي التي تساهم بإظهار هذ المرض.

في هذا البحث استخدم نماذج الانحدار المكاني (spatial regressive model) لتحليل البيانات المكانية لمرض سرطان الثدي ومن خلال المقارنة التقدير بين نماذج الانحدار المكاني بواسطة محاكاة مونت كارلو لاختيار افصل مقدر بين النموذجي الانحدار المكاني الاول نموذج الانحدار الذاتي المكاني (spatial autoregressive mode) والثاني نموذج الخطأ المكاني(spatial error model) وتطبيق طريقتي التقدير طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة الامكان الاعظم على نماذج الانحدار ولغرض المقارنة استخدام معيار المقارنة متوسط مربع الخطأ (Mean Square Error) على بيانات ذات عينات ومعلمات مختلفة للتحقق من أداء الطرائق واظهرت النتائج ان طريقة الامكان الاعظم لنموذج الانحدار الذاتي المكاني هي الافضل باختلاف حجم العينة المستعملة وعدد المتغيرات التوضيحية.

الكلمات المفتاحية: الانحدار الذاتي المكاني؛ مصفوفة الاوزان المكانية؛ طريقة المربعات الصغرى؛ طريقة الامكان الاعظم؛ متوسط مربعات الخطا.

1. المقدمة

يعّد الانحدار المكاني من الاساليب الاحصائية المهمة في تحليل البيانات اذ تمكن الباحث من التعيين لمجموعة من العوامل وبيان تأثيراتها المباشرة على الظاهرة قيد الدراسة (بتحليل الآثار المباشرة للمتغيرات التوضيحية على متغير الاستجابة). وبهذا تساعد الباحث على استنتاج التفسيرات المنطقية للظاهرة وبصورة أكفأ في تحليل البيانات. وتبرز اهمية الانحدار المكاني والاعتمادية المكانية (البيانات المكانية) بدلا عن الاعتماد على (السنوات) وان تكون المسافات المكانية بين المشاهدات بشكل او اخر وليس المسافات الزمانية كمعلومة اضافية للتقديرات الاحصائية لانتشار ظاهرة سرطان الثدي وباختلاف طبيعة الظاهرة المدروسة في الواقع العملي فقد استخدم أكثر من نوع لنماذج الانحدار المكاني للظاهرة المدروسة.

Nomenclature & Symbols		
SAR	Spatial Autoregressive Model	الانحدار الذاتي المكاني
SEM	Spatial Error Model	الانحدار الخطأ المكاني
OLS	Ordinary Least Squares	طريقة مربعات الصغرى
MLE	Maximum Likelihood Estimated	طريقة الامكان الاعظم
MSE	Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ

استخدم الباحثان florax&flomer في عام 1991 مقارنة العديد من طرق الانحدار التقليدية واجراء تقدير للنماذج ذات التخلف المكاني ذات الارتباط المكاني ومن خلال البحث عن المتغيرات المتأخرة مكانيًا تم دمج المتغيرات المتخلفة مكانيًا المحذوفة في النموذج ثم التحقق من فعالية الإجراءات التقليدية والبديلة في العينات الصغيرة عن طريق تقنيات مونت كارلو لهيكل شبكي غير منتظم [1].

قام كلا من Harry& Anselin في عام 1997 بتقديم عينة صغيرة للاختبار في سلسلة من تجارب محاكاة مونت كارلو ومقارنة ادائها بعدد من الاساليب المخصصة (خصائص اختبار موران الأول للارتباط التلقائي للخطأ المكاني عندما يتم تضمين المتغيرات الداخلية في مواصفات الانحدار ويتم التقدير عن طريق إجراءات المتغيرات التوضيحية (مثل المربعات الصغرى ذات المرحلتين)، إن هذه الإجراءات المخصصة تؤدي الى أداء جيد، لذلك تم قبول الاختبار في وجود متغيرات تابعة متخلفة مكانيًا .وبعد تقدير لبيانات المقطع العرضي تم التأكد من ان الاختبار سهل الحساب ويجب أن يصبح جزءا من اختبار المواصفات الروتيني للنماذج ذات التجانس الداخلي [2].

قام كلا من Folmer واخرون في عام 2010 بمقارنة طريقتين عن طريق محاكاة مونت كارلو لأخذ الارتباط الذاتي المكاني، تم استخدام نموذجين هما: نموذج الانحدار الذاتي المكاني الكلاسيكي ونموذج المعادلات الهيكلية مع المتغيرات الكامنة. يفسر الأول الاعتماد المكاني والتأثيرات غير المباشرة في البيانات ويمثل الأخير الاعتماد المكاني والتأثيرات غير المباشرة مصفوفة الأوزان المكانية بينما ترتبط المتغيرات المتخلفة مكانيًا ذات الاعتماد المكاني في نموذج القياس. إذ كانت نتائج المحاكاة المستندة إلى مجموعة بيانات الجريمة في أنسيلن كولومبوس، أوهايو، أن نهج المتغيرات الكامنة التي تم تحديدها بشكل خاطئ يتتبع بشكل طفيف النهج الكلاسيكي المحدد بشكل صحيح من حيث التحيز وجذر الخطأ التربيعي لمقدرات المعامل [3].

قدم كلا من Luzzati واخرون في عام 2017 دراسة بتقييم العلاقة بين دخل الفرد وحالات السرطان الجديدة (الإصابة) تجريبيًا باستخدام مجموعة بيانات مقطعية من 121 دولة حيث استخدم نموذج الخطأ المكاني، الذي ينتج بدوره الارتباط غير الصفري للوحدات في المصفوفة الوزن المكانية، التي تعكس التفاعلات المحتملة بين لوحدات المجاورة (للبلدان المجاورة). إذ أظهر تحليل الانحدار أن العلاقة بين الدخل ومعدل الإصابة بالسرطان ما يزال إيجابيا حتى بعد التحكم في كل من الآثار الإيجابية للتنمية الاقتصادية [4].

قام كلا من Wadhah. S & Nawras. M في 2022 استخدم نماذج الانحدار المكاني العام (SAC) ومؤشرات ومعاملات إحصائية لتحليل البيانات المكانية لبيانات المرضى المصابين بمرض السرطان، وتطبيق طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات الانموذج المكاني العام باستخدام مصفوفات التقارب المكاني المنتظم والمعدلة لتفسير العلاقة بين المتغير التابع Y الذي يمثله عدد المرضى المتغيرات التفسيرية، اظهرت النتائج التأثيرات الكبيرة لبعض المتغيرات التفسيرية على المتغير التابع Y، وان قيم المقدرة المتغير التابع Y قريبة من القيم الحقيقية للمتغير نفسه [5].

يوجد نوعين اساسيين من نماذج الاقتصاد القياسي المكاني هما:

- النوع الاول من النماذج يدعى نموذج الانحدار الذاتي المكاني spatial autoregressive model (SAM)

يشار الى هذا النموذج كنموذج مكاني ينظر في معالجة وجود مشكلة الارتباط المكاني بين المشاهدات الظاهرة ذاتها (الارتباط الذاتي) واذ يكون المكان هو المتغير الفاعل والمفس للمشاهدات عوضا عن الاستعانة بالمتغيرات التوضيحية حيث المتغير المعتمد المتخلف مكانيا كأحد المتغيرات التوضيحية.

- النوع الثاني من النماذج يدعى نموذج الخطأ المكاني spatial error model (SEM)

الذي يكون فيه اخطاء النموذج ترتبط مكانيا ويهدف الى تصحيح الخطأ المكاني. ومن المعروف ان من اهم الخروقات التي تنتاب نموذج الانحدار هي استقلالية الخطأ، وان بعض العوامل غير ملحوظة و/ أو غير مقيسة تم حذفها في الانحدار. وإذا كانوا مؤثرين، فإن تأثيرهم يندرج ضمن تفسير حدوث الظاهرة في مصطلح الخطأ الذي يظهر نمطًا مكانيا [6].

1.2. هدف البحث

يهدف البحث للمقارنة بين بعض نماذج الانحدار المكاني باستعمال بعض طرائق التقدير والمقارنة فيما بينها*للحصول* على أفضل مقدر من خلال استخدام طريقة المحاكاة.

1.3. الانحدار المكاني

يعرف على انه طريقة احصائية تستخدم لتحديد العلاقة بين متغير الاستجابة ومتغيرات التوقع مع مراعاة وجود روابط بين مناطق، اي يوجد الارتباط الذاتي المكاني في البيان، [7] ان اساليب الانحدار المكاني تمكن من حساب الاعتمادية بين المشاهدات التي تنشأ من نقاط أو مناطق تقع في فضاء معين. وهذه البيانات التي يتم جمعها من المناطق أو النقاط الموجودة لعينة الدراسة تكون غير مستقلة، بل لها اعتمادية مكانية، وان الملاحظة في موقع معين تظهر قيم تكون مشابهة لتلك القيم في المواقع المجاورة او القريبة، وتعتمد نماذج تحليل الانحدار المكاني بشكل أساس على مصفوفة وزن (W) المكانية [6].

1.4. انموذج الانحدار الذاتي المكاني

هو احد نماذج الانحدار الذاتي، ويشير إلى وجود علاقة تبعية (ترابط ذاتي) بين مجموعة من الملحوظات أو المشاهدات ذاتها [8] . إن أنموذج الانحدار الذاتي المكاني (SAR) يعّد احد الادوات المستخدمة لقياس لتحليل البيانات ذات الارتباط المكاني، ويذكر كلا منChong Won Kim ، (2003وآخرون) [9] انه أنموذج مختلط لأنه يدمج أنموذج انحدار خطي وأنموذج تأخر مكاني على المتغير التابع، الصيغة الرياضية لانموذج (SAR) كما موضح في ادناه [6] :

$$Y=\rho W\,Y+X\beta+e \quad (1)$$

$$y = (I_N - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I_N - \rho W_1)^{-1}\varepsilon \quad (2)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (3)$$

إذ إن:

W: مصفوفة المتجاورات أبعادها.(n ×n)

ρ: معلمة التأثيرات المكانية أو تسمى معلمة الانحدار الذاتي المكاني.

إن قيمة معلمة الانحدار المكاني تقع بين 1+ > ρ > 1-

عندما تكون قيمة ρ= 0 انه لا يوجد ارتباط ذاتي مكاني، ويكون نموذج الانحدار هو النموذج الكلاسيكي Y=Xβ+ε

- وفي حالة إن ρ > 0 أي انه ارتباط ذاتي موجباً، تميل القيم المجاورة إلى أن تكون متشابهة لبعضهما البعض
- أما في حالة ρ < 0 أي انه ارتباط ذاتي سالب، تميل القيم المجاورة إلى ان تكون مختلفة عن بعضهما البعض.

وإذ $e= \lambda W_2\, e +\varepsilon$

1.5. انموذج الخطأ المكاني Spatial Error Model (SEM)

تعّد استقلالية حد الخطأ مشكلة في نماذج الانحدار الكلاسيكي عند تحليل البيانات ذات الارتباط او تتأثر بالملحوظات المجاورة لها، ويفترض ان انموذج الخطأ إن أخطاء الانموذج لها ارتباط مكاني (عكس افتراض استقلال الأخطاء في الانموذج الكلاسيكي)، لذلك يعمل هذا الانموذج (spatial error model)على معالجة الخطأ المكاني، الصيغة الرياضية للنموذج كالتالي[10]:

$$Y=X\beta+e \quad (4)$$
$$e=\lambda W_2+\varepsilon \quad (5)$$
$$e=(I-\lambda W)^{-1}\varepsilon \quad (6)$$
$$Y=X\beta+[(I_N-\lambda W_2)] \quad (7)$$
$$\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I_n) \quad (8)$$

حيث λ هي معلمة الانحدار الخطأ المكاني التي ستقدر مع معلمات الانحدار أو هي معلمة معامل التأخر المكاني على الخطأ.e

يلاحظ في نموذج الخطأ المكاني (Spatial Error Model) معلمة الاعتماد المكاني تكون في تعبير الخطأ، إذا كانت (λ =0) فهذا يعني انه لا يوجد ارتباط مكاني بين الأخطاء للمشاهدات المتجاورةi ، jويعني بأن أنموذج الإنحدار الخطي الكلاسيكي هو الانموذج المناسب، أما إذا كانت ($\lambda \neq 0$) يعني وجود الاعتماد مكاني بين الأخطاء للمشاهدات المتجاورة.

2. مصفوفة الأوزان المكانية (Spatial Weights Matrix)

هي مصفوفة تصف هيكل من العلاقات بين ازواج من الوحدات، يمثل كل عنصر في المصفوفة الارتباط المكاني بين الزوج المواقعi) ، (jبشكل مصفوفة مربعة تكون مبنية على اساس علاقات التجاور للتأثيرات المكانية لكل موقع (i) مع المواقع الاخرى(j)،وتكون العناصر القطرية في المصفوفة مساوية الى الصفر، وهناك العديد من مصفوفة الأوزان المكانية يذكر منها [5]:

2.1. التقريب الخطي Linear contiguity

عندما تكون $w_{ij}=1$ فإن للكياناتi ،jزال متجاورتين وتشتركان في ميزة مشتركة لمنطقة الاهتمام

اما اذا كانت،$w_{ij}=0$ ، إذ انi ، jليست متجاورة ولا يوجد حطا مشتركا بينهما

2.2. تلامس Rook contiguity

قيمة العناصر التي تأخذ القيمة واحد هي في حالة اذا كانت منطقتان متجاورتان تشتركان بميزة مشتركة وفي اي جانب بشكل +، اما العناصر الاخرى لهذه المصفوفة تأخذ القيمة صفر.

2.3. التواصل Bishop contiguity

التجاور يكون اذا كانت منطقتان تشتركان في نقطة وبهذه النقطة يكون حد مشترك بين المنطقتين × وتكون قيمة العنصر مساوياً الى الواحد وفيما عدا ذلك يكون العنصر مساوياً الى الصفر.

2.4. التجاور Queen contiguity

هي المصفوفة التي تجمع عناصرها من عناصر مصفوفة التجاور (Rook) وعناصر مصفوفة(Bishop) ، اي يكون التجاور في هذه المصفوفة حداً مشتركاً او نقطة مشتركة وبشكل ×+.

3. طرائق التقدير

سيتم استعراض الطرائق ((OLS) المربعات الصغرى الاعتيادية و(MEL)الامكان الاعظم المستعملة في تقدير لكلا النموذجين (SAR) و(SEM) اعلاه:

3.1. طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية Ordinary Least Squares (OLS)

يعّد نموذج الانحدار العالمي التقليدي (أي باستخدام طريقة (OLS) للتقدير) هو الأكثر شهرة بين تقنيات الانحدار جميعاً، ويهدف الى تقدير متجه معاملات الانحدار β بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) بحيث يتم تقليل الفرق التربيعي الإجمالي بين القيم المرصودة والمتوقعة لمتغير الاستجابة ومتغيرات التوضيحية، يُعرف هذا النوع من الانحدار باسم "عالمي" بسبب الثبات المكاني لتقديرات معامله، مما يعني أنه يمكن تطبيق نموذج واحد بالتساوي على مجالات الاهتمام المختلفة.. يتم تعريف (OLS) على أنه المعادلة التالية [6]:

$$y = X\beta+\varepsilon \quad (9)$$

ويمكن اعادة صياغتها بالتالي:

$$\varepsilon = Y - X\beta \quad (10)$$

$$\varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad (11)$$

وباشتقاق: $\varepsilon'\varepsilon$ بالنسبة إلى β ومساواة المعادلة الناتجة بالصفر نحصل على

$$b_{(OLS)} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (12)$$

3.1.1. تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية لانموذج(SAR)

لتقدير النموذج الانحدار الذاتي المكاني (SAR)) بطريقة (OLS) يمكن تقدير متجه معاملات الانحدار β بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) بحيث من المفترض أن المتغيرات التوضيحية مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي في ظل هذه الافتراضات، فإن تقدير (OLS) يكون غير متحيز وطبيعي ومن الممكن ان يكون فعّال احصائيا لنماذج الانحدار المكاني. كما هو موضح في أدناه. [6]

نموذج (SAR) وبحسب صيغته:

$$Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon \quad (13)$$

ويمكن إعادة كتابته بالصيغة الآتية:

$$\varepsilon = Y\ \rho WY - X\beta \quad (14)$$
$$= (I - \rho W)Y - X\beta \quad (15)$$
$$\varepsilon'\varepsilon = [(I - \rho W)Y - X\beta]'[(I - \rho W)Y - X\beta] \quad (16)$$
$$E(\varepsilon'\varepsilon) = Y'Y - \rho Y'WY - \rho Y'W'Y + \rho 2\ Y'W'WY - 2\beta'X'Y + 2\rho\beta'X'WY + \beta'X'X\beta \quad (17)$$

وبإجراء الاشتقاق بالنسبة (β) ومساواتها إلى الصفر نحصل على الآتي:

$$b_{(OLS)} = (X'X)\text{-}1\ X'Y - \rho(X'X)\text{ -}1\ X'WY \quad (18)$$

أما الاشتقاق بالنسبة لمعلمة الانحدار الذاتي المكاني (ρ) ومساواتها إلى الصفر نحصل على :

$$\rho Y' W' WY = Y' WY - b' X' WY \quad (19)$$

وبالتعويض ف عن قيمة b كما في الصيغة (18) يتم الحصول على صيغة تقدير لمعلمة الانحدار الذاتي المكاني(ρ)

$$\tilde{\rho} = [\, Y' W' WY - \underline{b}_L' X' WY \,]^{-1} [\, Y' WY - \underline{b}_o' X' WY \,] \quad (20)$$

3.1.2. تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية لانموذج(SEM)

لتقدير نموذج الخطأ المكاني (spatial error model)بطريقة(OLS) ،بحيث من المفترض أن الأخطاء مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي في ظل هذه الافتراضات، وكما موضح ادناه[7]:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (21)$$

$$\varepsilon = \rho W\varepsilon + u, \text{ where } \varepsilon/x \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2, I_n) \quad (22)$$

$$\varepsilon = (I - \rho W)^{-1} u \quad (23)$$

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 (I - \rho W)^{-1} [(I - \rho w)^{-1}]^T \quad (24)$$

وممكن إعادة صياغتها بالشكل التالي:

$$y = \rho Wy + X\beta - WXy + \varepsilon \quad \text{where } y = \rho, \beta \quad (25)$$

يرتبط مصطلح Wy مع مصطلح الخطأ، مما ينتج عنه تجانس كما في المعادلة التالية:

$$y = (I - \rho W)^{-1} (X\beta - WXy) + (I - \rho W)^{-1} u \quad (26)$$

$$E(Wy\, \varepsilon^T) = E[\, W(I - \rho W)^{-1} (X\beta - WXy) + W(I - \rho W)^{-1} \varepsilon)]\varepsilon^T \quad (27)$$

$$= [W(I - \rho W)^{-1} (X\beta - WXy)\, E(\varepsilon^T) + W(I - \rho W)^{-1} E[\varepsilon\varepsilon^T] \quad (28)$$

باشتقاق المعادلة بالنسبة βومساواتها للصفر نحصل على

$$b_{ols} = (X'^{W^{-1}} X)^{-1} X' W^{-1} Y \quad (29)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 W (I - \rho W)^{-1} \qquad I \neq 0 \quad (30)$$

3.2. طريقة تقدير الامكان الاعظم

طريقة تقدير الإمكان الأعظم (MLE)، هي إحدى الطرائق الأكثر أهمية لأنها تعطي أفضل تقدير للمعلمة من بين تقديرات عدة ممكنة، ومن الممكن التقدير بهذه الطريقة للنموذجين ((SEM،SAR)) ، التي تم تحديد النماذج لأول مرة بواسطة Ord (1975) [11] بافتراض انها حالة الطبيعية لشروط الخطأ. ثم يتبع الاحتمال المشترك من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات الى Y على عكس ما ينطبق على نموذج الكلاسيكي.

3.2.1. تقدير الإمكان الأعظم لانموذج:(SAR)

$$Y = X\beta + \rho WY + \varepsilon \quad (31)$$

$$Y = (I - \rho W)^{-1} X\beta + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon \quad (32)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (33)$$

$$\varepsilon = (I - \rho W)Y - X\beta \quad (34)$$

إن دالة الإمكان الأعظم لهذا الانموذج هي:

$$\text{Ln } L(\beta, \rho, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \text{Ln } 2\prod - \frac{n}{2} \text{Ln } \sigma^2 + \text{Ln}|(I - \rho W)| -$$

$$(1/2\sigma^2)[(Y - \rho Wy - X\beta)' (Y - \rho Wy - X\beta)] \quad \ldots \quad (35)$$

وبإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى β و σ^2 ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$b_{(MLE)} = [\, (X' X)^{-1} + X' (I - \rho W)Y \,] \quad (36)$$

$$e = Y - X[\, (X' X)^{-1} + X'Y \,] - \rho[\, (X' X)^{-1} + X' WY \,] \quad (37)$$

باستعمال الطريقة التكرارية لخطوات دالة الامكان الاعظم يتم الحصول على تقدير التباين كما يأتي:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(y - \rho Wy)'(y - \rho W y)}{n} \quad (38)$$

3.2.2. تقدير الإمكان الأعظم لانموذج(SEM)

يكون الاهتمام في هذا النموذج (θ) وهي التي توضح الإرتباط بين البواقي [12].

اما دالة الإمكان الأعظم لهذا الانموذج هي:

$$Y = X\beta + u \quad (39)$$

$$u = \theta Wu + e \quad \text{or} \quad (40)$$

$$Y=X\beta + \theta Wu + e \quad (41)$$

$$L(\beta, \theta, \sigma^2)= \frac{-n}{2} \text{Ln } 2\prod - \frac{n}{2} \text{Ln } \sigma 2 + \text{Ln } | (I - \theta W)| - (1/2\sigma^2)[(Y-X\beta)'(I-\theta W)'(I-\theta W)(Y-X\beta)]) \quad (42)$$

وبإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى β و σ^2 ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$b_{(MLE)} = [\ (X' (I - \theta W)' (I - \theta W) X\ ]^{-1}\ X (I - \theta W)' (I - \theta W) Y \quad (43)$$

$$e = [\ Y - X\ b_{(MLE)}\ ] \quad (44)$$

$$\sigma^2_{(MLE)} = e'e\ / n \quad (45)$$

4. الجانب التجريبي

استخدم في هذا البحث اسلوب المحاكاة لتوليد البيانات المطلوبة في البحث ويمكن تعريف المحاكاة بعّدها تقنية عددية تستعمل للقيام باختبارات على الحاسوب عددًا، تتفاعل العلاقات المنطقية والرياضية فيما بينها لتصف سلوكا او ظاهرة في العالم الحقيقي، وتمتاز المحاكاة في إنها تقلل من التكاليف العالية والوقت والجهد المبذول الذي يتطلبه العمل في الحصول على العينات من الواقع العملي. وتعّد طريقة مونت كارلو Monte Carlo من بين أهم طرائق المحاكاة وأفضلها وأكثرها استخداما.

لتوليد البيانات الضرورية لغرض المقارنة بين الطرائق باختلاف احجام العينات واختلاف قيم تم تنفيذ اسلوب المحاكاة من خلال استعمال البرنامج الإحصائي الماتلاب MATLAB واستخدام معيار المقارنة بين طرائق التقدير mean square error (MSE) .

يتم توليد نموذج محاكاة للاننحدار المكاني للانموذجين

الانحدار الذاتي المكاني SAR $y = \rho W y + \beta Z + \varepsilon$

الخطأ المكاني SEM $y = \beta Z + e$

لتوليد بيانات مكانية بطريقة مونت كارلو حيث تتضمن المحاكاة عدة خطوات وكالآتي:

الخطوة الأولى: تحديد حجمين من العينات (n=50،n=100) المعنية بالدراسة وافتراض ثلاث مجاميع من قيم المتغيرات التوضيحية X_i: (X3،X6،X9) ومتغير الاستجابة واحد (Yi)

الخطوة الثانية: في هذه الخطوة يتم توليد متغير عشوائي مستقل (X) ومتغير عشوائي حد الخطأ (ε).

الخطوة الثالثة: في هذه الخطوة يتم إيجاد مصفوفات W، W_{ij} (QueenContiguity) مشترك وكذلك في نقطه رأس مشتركة : يكون المعيار ان التجاور عند خليتين تشتركان في جانب

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ i\ and\ j\ are\ contiguous \\ 0 & if\ i\ and\ j\ are\ contiguous \end{cases}$$

الخطوة الرابعة: طرق التقدير

تم استعمال نوعين من طرق التقدير لمعلمات نماذج الانحدار المكاني (((SEM،SAR))) كل طريقة تقدير لكلا النموذجين السابقين وهي:

- طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)) وصيغتها هي كالآتي:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (46)$$

تقدير بطريقه المربعات الصغرى للانموذج الانحدار الذاتي المكاني SAR وبحسب الصيغة الرياضية في المعادلة رقم (1) و(2)

$$b_{(OLS)}= (X' X)\text{-}1\ X' Y - \rho(X' X)\ \text{-}1\ X' WY$$

تقدير بطريقة المربعات الصغرى لانموذج الخطأ المكاني SEM وبحسب الصيغة الرياضية (4)و (5)

$$b_{ols} = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y$$

- طريقة تقدير الامكان الاعظم (MLE) وصيغتها هي كالآتي:

$$L = F(X_{i=1\ldots n}, \lambda), \quad (47)$$

$$\text{L} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda)$$

تقدير بطريقة الامكان الاعظم للأنموذج SAR الانحدار الذاتي المكاني وبحسب الصيغة الرياضية (1) و(2):

$$b_{(MLE)} = [\ (X' X)^{-1}\ + X' (I - \rho W) Y\ ] \quad (36)$$

تقدير بطريقة الامكان الاعظم للنموذج SEM لانحدار الخطأ المكاني وبحسب الصيغة الرياضية في (4)و(5):

$$b(MLE) = [\ (X' (I - \theta W)' (I - \theta W) X\ ]\text{-}1\ X (I - \theta W)' (I - \theta W) Y \quad (43)$$

الخطوة السادسة: للمقارنة بين المقدرات الاحصائية والمفاضلة فيما بينها، سيتم استخدام أهم المقاييس الاحصائية، وهو متوسط مربعات الخطأ ((MSE) اذ يعّد الاكثر شيوعاً، فهو يقيس مدى اقتراب المقدر وابتعاده عن القيم الحقيقية الصيغة الرياضية

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\hat{\lambda})\ (\lambda)^2 \quad (48)$$

n= عدد مرات تكرار التجربة

$\hat{\lambda}$ = القيمة المقدرة

λ = القيمة الحقيقة

5. نتائج تجربة المحاكاة

تم تكرار تجربة للاحجام وعينات مختلفة، لكلا النموذجي الانحدار المكاني ((SAR،SEM)) المذكورين سابقا، وتمت المقارنة بين الطرائق المستعملة في عملية التقدير والمتمثلة بطريقة المربعات الصغر (OLS) وطريقة تقدير الامكان الاعظم (MLE))، بالاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، وبعد اختبار البيانات لفروض التحليل تم ايجاد مقدرات معلمات نموذج الانحدار بالطرائق المذكورة وكانت النتائج للتجربة الاولى في توليد البيانات المطلوبة للبحث حيث تم اختبار حجم العينة n=50 مفرده وللمجموعة المتغيرات التوضيحية المستقله ثلاثة ولتكن (العمر والتاريخ العائلي والجنس) حيث X_1 =X_i ،X_2،X_3 مع متغير معتمد واحد Y، أما بالنسبة لايجاد الكفاءة النسبية للطرائق.

فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما هي موضحة في جداول (1) و (2):

جدول (1) لتقدير المعلمات النماذج لكل طريقة تقدير المستخدمة

Estimation Method	SAR		SEM	
	OLS	MLE	OLS	MLE
$\hat{\beta}_0$	0.154412	0.114981	0.11814	0.117073
$\hat{\beta}_1$	0.850707	0.811277	0.814436	0.813368
$\hat{\beta}_2$	0.626011	0.586581	0.58974	0.588671
$\hat{\beta}_3$	0.515602	0.476172	0.479331	0.478262

جدول (2) يوضح استخدام متوسط مجموع مربعات الخطأ للنموذجين ((SEM،SAR))

Model	Method	(MSE)
SAR	OLS	0.039132
	MLE	0.02238
SEM	OLS	0.023356
	MLE	0.023019

- تبين النتائج من جداول (1) و (2) للتجربة الاولى لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) حيث حجم العينة = 50 مفرده ولمجموعة المتغيرات التوضيحية Xi=3 لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق التقدير ((MLE،OLS)) لكلا النموجين الانحدار المكاني اعلاه وبالاستعانة بمقياس((MSE) متوسط مربعات الخطأ بنسب متقاربة تقريبا الا ان طريقة التقدير (MLE) لنموذج (SAR))اظهرت اقل متوسط مربعات الخطأ عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني إذ بلغ (0.02238) كما هو في جدول (2) التي تعّد افضل طريقة تقدير
- اما بالنسبة لنتائج لنفس التجربة حيث جحم العينة 50 مفرده واستخدام لمجموعة المتغيرات التوضيحية اخرى حيث اخذنا ستة متغيرات توضيحية ولتكن (العمر، التاريخ العائلي، الجنس، هل توجد اصابة سابقة، حالة الزوجية، تناول لحبوب هرمونية) حيث X_i= X_1 ،X_2،X_3X_4،X_5،X_6، ولمتغير استجابة واحد.

أما بالنسبة لايجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في جداول (3) و (4):

جدول (3) لتقدير المعلمات النماذج المكانية لكل طريقة تقدير مستخدمة

Estimation Method	(SAR)		SEM	
	OLS	MLE	OLS	MLE
$\hat{\beta}_0$	-0.07702	-0.05008	-0.05626	-0.11598
$\hat{\beta}_1$	0.666589	0.693526	0.687347	0.627629
$\hat{\beta}_2$	0.463303	0.490241	0.484061	0.424344
$\hat{\beta}_3$	0.363354	0.390292	0.384112	0.324395
$\hat{\beta}_4$	0.31793	0.344867	0.338687	0.278971
$\hat{\beta}_5$	0.302983	0.329921	0.323741	0.264024
$\hat{\beta}_6$	0.226919	0.253856	0.247676	0.18796

جدول (4) لمتوسط مربعات الخطأ لكل نموذج انحدار مكاني ((SEM،SAR))

Model	Method	(MSE)
SAR	OLS	0.041504
	MLE	0.072677
SEM	OLS	0.064411
	MLE	0.018725

تبين النتائج من جداول (3) و(4) للتجربة الاولى لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) حيث حجم العينة = 50 ولكن لمجموعة المتغيرات التوضيحية $X_{i=6}$ لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق التقدير ((MLE،OLS)) لكلا النموذجين الانحدار المكاني اعلاه وبالاستعانة بمقياس (MSE) متوسط مربعات الخطأ بنسب متفاوتة تقريبا الا ان طريقة التقدير (MLE) لنموذج ((SAR) اظهرت اعلى نسبة متوسط مربعات الخطأ عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني إذ بلغ (0.072677) كما هو في جدول (4).

اما بالنسبة لنتائج للتجربة نفسها حيث جحم العينة 50 مفردة ولكن للمجموعة المتغيرات التوضيحية ستكون تسعة ولتكن (العمر، التاريخ العائلي، الجنس، هل توجد اصابة سابقة، حالة الزوجية، تناول لحبوب هرمونية، التحصيل العلمي، العمر عند الزواج، التدخين) X_i= X_1 ،X_2،X_3X_4،X_5،X_6،X_7،X_8،X_9 ولمتغير استجابة واحد، أما بالنسبة لإيجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في جداول (5)و(6) :

جدول (5) لتقدير معلمات النماذج الانحدار المكاني لكل طريقة تقدير مستخدمة

Estimation Method	SAR		SEM	
	OLS	MLE	OLS	MLE
$\hat{\beta}_0$	-0.06237	-0.02589	-0.00444	0.011798
$\hat{\beta}_1$	0.620054	0.656541	0.677988	0.694227
$\hat{\beta}_2$	0.408829	0.445315	0.466762	0.483003
$\hat{\beta}_3$	0.355022	0.391509	0.412956	0.429195
$\hat{\beta}_4$	0.260234	0.29672	0.318168	0.334407
$\hat{\beta}_5$	0.204835	0.24132	0.262767	0.279008

$\hat{\beta}_6$	0.178207	0.214693	0.236141	0.252381
$\hat{\beta}_7$	0.150635	0.187121	0.208568	0.224808
$\hat{\beta}_8$	0.126422	0.162907	0.184354	0.200595
$\hat{\beta}_9$	0.159098	0.195583	0.217031	0.233271

جدول (6) لمتوسط مربعات الخطأ لكل نموذج انحدار ((SEM،SAR))

Model	Method	(MSE)
SAR	OLS	0.011028
	MLE	0.033702
SEM	OLS	0.061225
	MLE	0.089057

تبين النتائج من جداول (5) و(6) للتجربة الاولى لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) حيث حجم العينة = 50 ولكن لمجموعة المتغيرات التوضيحية $X_{i=9}$ لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق التقدير ((MLE،OLS)) لكلا النموجين الانحدار المكاني اعلاه وبالاستعانة بمقياس (MSE) متوسط مربعات الخطأ بنسب متفاوته تقريبا الا ان طريقة التقدير ((MLE لنموذج ((SEM اظهرت اعلى نسبة متوسط مربعات الخطا عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني إذ بلغ (0.072677) كما هو في جدول (6).

اما بالنسبة لنتائج للتجربة الثانية حيث ان جحم العينة 100 مريضة او مريض وللمجموعة المتغيرات التوضيحية سنأخذ ثلاثة ولتكن (العمر،التاريخ العائلي،الجنس) X_1 =X_i،X_2،X_3،لمتغير معتمد واحد Y، أما بالنسبة لايجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في جداول (7)و (8):

جدول (7) لتقدير معلمات الانحدار المكاني لكل طريقة تقدير

Estimation Method	*sar*		*sem*	
	OLS	***MLE***	***OLS***	***MLE***
$\hat{\beta}_0$	-0.03022	0.016798	-0.00992	0.030911
$\hat{\beta}_1$	0.787842	0.834866	0.808148	0.848978
$\hat{\beta}_2$	0.536702	0.583726	0.557007	0.597838
$\hat{\beta}_3$	0.411643	0.458666	0.431948	0.472779

جدول (8) لمتوسط مجموع مربعات الخطأ لنموذجي الانحدار (SAR) ((SEM)

Model	Method	(MSE)
SAR	OLS	0.026426
	MLE	0.047712
SEM	OLS	0.033315
	MLE	0.057763

تبين النتائج من جداول (7) و(8) للتجربة الثانية لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) حيث حجم العينة = 100 ولكن لمجموعة المتغيرات التوضيحية $X_{i=3}$ لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق التقدير ((MLE،OLS)) لكلا النموذجين الانحدار المكاني اعلاه وبالاستعانة بمقياس (MSE) متوسط مربعات الخطأ بنسب متفاوتة تقريبا الا ان طريقة التقدير (MLE) لنموذج (SEM) اظهرت اعلى نسبة متوسط مربعات الخطأ عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني إذ بلغ (0.057763) كما هو في جدول (8).

- اما بالنسبة لنتائج للتجربة نفسها حيث جحم العينة 100مريضه او مصابة ولكن للمجموعة المتغيرات الوضيحية، ولتكن (العمر، التاريخ العائلي، الجنس، هل توجد اصابة سابقة، حالة الزوجية، تناول لحبوب هرمونية) حيث X_1 $X_{i=6}$،X_2،X_3X_4،X_5،X_6، ولمتغير استجابة واحد)، أما بالنسبة لإيجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في جداول(9) و (10):

جدول (9) لتقدير معلمات نماذج الانحدار المكاني لكل طريقة تقدير مستخدمة

Estimation Method	*sar*		*sem*	
	OLS	***MLE***	***OLS***	***MLE***
$\hat{\beta}_0$	0.077383	0.086052	0.078741	0.099591
$\hat{\beta}_1$	0.732085	0.740755	0.733444	0.754293
$\hat{\beta}_2$	0.494735	0.503405	0.496093	0.516943
$\hat{\beta}_3$	0.425439	0.434109	0.426797	0.447647
$\hat{\beta}_4$	0.375514	0.384183	0.376872	0.397722
$\hat{\beta}_5$	0.283412	0.292081	0.28477	0.30562
$\hat{\beta}_6$	0.281217	0.289886	0.282575	0.303425

جدول (10) لمتوسط مجموع مربع الخطأ لنموذجي الانحدار المكاني ((SEM،SAR))

Model	Method	(MSE)
SAR	OLS	0.05152
	MLE	0.059995
SEM	OLS	0.052787
	MLE	0.075067

تبين النتائج من جداول (9) و(10) للتجربة الثانية لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) حيث حجم العينة = 100 ولكن لمجموعة المتغيرات التوضيحية $X_{i=6}$ لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق السابقة اظهرت اعلى نسبة متوسط مربعات الخطأ عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني حيث بلغ (0.075067) كما هو في جدول (10) .

- اما بالنسبة لنتائج لنفس التجربة إذ حجم العينة 100مفردة ولمجموعة المتغيرات الوضيحية وسناخذ تسعة متغيرات ولتكن (العمر، التاريخ العائلي، الجنس، هل توجد اصابة سابقة، حالة الزوجية، تناول لحبوب هرمونية، التحصيل العلمي، العمر عند الزواج، التدخين) $X_{i=}$ X_1،X_2،X_3X_4،X_5،X_6،X_7،X_8،X_9 ولمتغير استجابة واحد، أما بالنسبة لايجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في جداول (11) و (12):

جدول (11) لتقدير معلمات الانحدارالمكاني بطرق التقدير المستخدمة

Estimation Method	*sar*		*sem*	
	OLS	***MLE***	***OLS***	***MLE***
$\hat{\beta}_1$	0.710582	0.743601	0.730278	0.779309
$\hat{\beta}_2$	0.466962	0.499981	0.486658	0.53569
$\hat{\beta}_3$	0.372279	0.405298	0.391975	0.441006
$\hat{\beta}_4$	0.3183	0.351319	0.337996	0.387027
$\hat{\beta}_5$	0.249118	0.282136	0.268813	0.317845
$\hat{\beta}_6$	0.211081	0.2441	0.230777	0.279809
$\hat{\beta}_7$	0.188646	0.221664	0.208342	0.257373
$\hat{\beta}_8$	0.169019	0.202038	0.188715	0.237746
$\hat{\beta}_9$	0.134723	0.167741	0.154419	0.20345

جدول (12) لمتوسط مجموع مربعات الخطأ لنموذجي ((SAR،SEM))

Model	Method	(MSE)
SAR	*OLS*	0.021551
	MLE	0.045897
SEM	*OLS*	0.033519
	MLE	0.096114

تبين النتائج من جداول (11) و(12) للتجربة الثانية لتقدير المعلمات الانحدار المكاني للنموذجين ((SAR،SEM)) إذ حجم العينة = 100 ولكن لمجموعة المتغيرات التوضيحية $X_{i=9}$ لمتغير استجابة واحد وتطبيق طرق السابقة اظهرت اعلى نسبة متوسط مربعات الخطأ عن باقي التقديرات للنماذج الانحدار المكاني إذ بلغ (0.096114) كما هو في جدول (12) .

6. الاستنتاجات

بعد إجراء وصف وتنفيذ تجارب المحاكاة على نماذج الانحدار المكاني ((SAR، (SEM)) وتطبيق طريقتي التقدير ((OLS)، MLE)وما تم عرضه من نتائج للحصول على أفضل طريقة استنتج الباحث ما يلي:

- اعتمادا على مقياس متوسط مجموع مربعات الخطأ نستنتج عند مقارنة طريقتي التقدير ((MEL،OLS) في تقدير نماذج الانحدار المكاني ((SAR،SEM)) بحسب مصفوفة الوزن المكانية أن أفضل طريقة تقدير هي (MLE) طريقة الامكان الاعظم لنموذج النحدار الذاتي المكاني (SAR)
- نلاحظ أن عند استعمال طرائق التقدير ((OLS، (MLE)) على نماذج الانحدار المكاني أظهر النتائج المقارنة بمقياس المقارنة متوسط مجموع مربعات الخطأ (MSE) في التجربة الاولى إذ حجم العينة 50 مفرده ان طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من طريقة التقدير (OLS) لنموذج (SAR) لإنها حققت اقل قيمة لمعيار مقارنة (MSE))عند مجموع المتغيرات التوضيحية التي كانت ثلاثة متغيرات وإذ بلغت 0.02238.
وفي حالة حجم العينة نفسها وعند زيادة عدد المتغيرات التوضيحية الى 6 متغيرات أعطت نتائج ان طريقة ((MLE) لنموذج ((SEM)افضل طرق التقدير لإن معيار المقارنة (MSE)كان الاقل بلغت 0.018725.
اما في حالة زيادة عدد المتغيرات التوضيحية الى 9متغيرات اعطت النتائج ان طريقة ((MLE) لنموذج ((SEMافضل الطرق لإن معيار المقارنة ((MSE) اعطى اعلى النتائج بلغت 0.089057 لزيادة عدد المتغيرات التوضيحية
- كما نلحظ عند تكرار التجربة الاولى باستعمال طرق التقدير ((OLS، MLE)) على نماذج الانحدار المكاني واستخدام مقياس المقارنة متوسط مجموع مربعات الخطا (MSE)) لكن استخدمنا حجم العينة 100 مفردة وكانت متغيرات التوضيحية ثلاثة اظهرت النتائج ان طريقة الامكان الاعظم (MLE) لنموذج (SEM))هي الافضل لإنها حققت اعلى قيمة لمعيار مقارنة (MSE) عند مجموع المتغيرات التوضيحية إذ بلغت 0.848978.
وفي حالة حجم العينة نفسها وعند زيادة عدد المتغيرات التوضيحية الى 6 متغيرات أعطت نتائج ان طريقة (MLE) لنموذج ((SEM) افضل طرق التقدير لإن معيار المقارنة (MSE) كان الاقل بلغ 0.075067.
اما في حالة زيادة عدد المتغيرات التوضيحية الى 9 متغيرات اعطت النتائج ان طريقة ((MLE) لنموذج (SEM) افضل الطرق لإن معيار المقارنة (MSE)اعطى اعلى النتائج بلغت 0.096114 لزيادة عدد المتغيرات التوضيحية.

7. التوصيات

بناءً على الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال النتائج التجريبية، يمكن أدراج أهم التوصيات وكالأتي:

- استعمال طريقة الاحتمال الاعظم (MLE) لتقدير نماذج الانحدار الذاتي المكاني، لما تبديه من فاعلية مقارنة (OLS).
- استعمال مصفوفة الوزن المكانية المعدلة (W) للنماذج المكانية .
- استعمال طرائق التقدير المقدمة وتطبيقها على بيانات حقيقية
- استعمال طرائق أخرى لايجاد المسافات بين قيم المشاهدات كمعيار للمقارنة.

References

[1] F. Raymond and H. Folmer، "Specification and Estimation of Spatial Linear Regression Models "، Regional Science and Urban Economics، vol. 22، no.3.pp. 405–432،1992.

[2] L. Anselin and H. H. Kelejian،"Testing for Spatial Error Autocorrelation in the Presence of Endogenous Repressors." International Regional Science Review، vol.20، no.1-2.pp. 153–182،1997.

[3] L. Anselin، H. Folmer، and H.Johan. L. Oud. "W-Based versus Latent Variables Spatial Autoregressive Models: Evidence from Monte Carlo Simulations." The Annals of Regional Science، vol. 47،no.3.pp. 619–639، 2010.

[4] T. Luzzati، A. Parenti، and T. Rughi، "Economic Growth and Cancer Incidence." Ecological Economics، vol.146،no.3.pp.381–396،2018.

[5] W. S. Ibrahim، N. S. Mousa، "Estimation of the general spatial regression model (SAC) by the maximum likelihood method"، International Journal of Nonlinear Analysis and Applications، vol.13، no.1،.pp.2947-2957،2022.

[6] L. Anselin، Spatial Econometrics: Methods and Models. The Netherlands، Kluwer Academic: Dordrecht،1988.

[7] P. Legendre، "Spatial Autocorrelation: Trouble or New Paradigm?"، the AAEA annual meetings، Salt Lake City، August، vol. 74، no. 6. pp. 1659–73، 1993.

[8] J. P. Lesage، "An Introduction to Spatial Econometrics"، Ecology، The Ecological Society of America، olv.123،no.3.pp.22-29، 2008.

[9] C.W Kim، T.Phipps & L.Anselin،" Measuring the benefits of air quality improvement: A spatial hedonic approach"، *Journal of Environmental Economics and Management*، vol. 45، no. 1، pp.2003.

[10] J.P.Lesage، The Theory، and Practice of Spatial Econometrics. Department of the Economics University of Toledo،1999.

[11] K. Ord، "Estimation Methods for Models for Spatial Interaction"، Journal of the American Statistical Association، Vol. 70، No. 349.pp. 120- 126، 1975.

[12] L.Anselin، J. L.Gallo، and H. Jayet. "Spatial Panel Econometrics."، Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics، 3rd edn. pp. 625–660،2008.